

Versuch III mit Lösung

Ziel des dritten Versuchs:

Berechnung, Simulation und Messung des Übertragungsverhaltens einer PT_3 -Strecke und eines Regelkreises aus PT_3 -Strecke und P-Regler.

3.1 Berechnung, Simulation und Messung des Frequenzgangs einer PT_3 -Strecke

Mit Hilfe der in Abbildung 3.1 dargestellten Operationsverstärkerschaltung ist eine Regelstrecke dritter Ordnung nachzubilden.

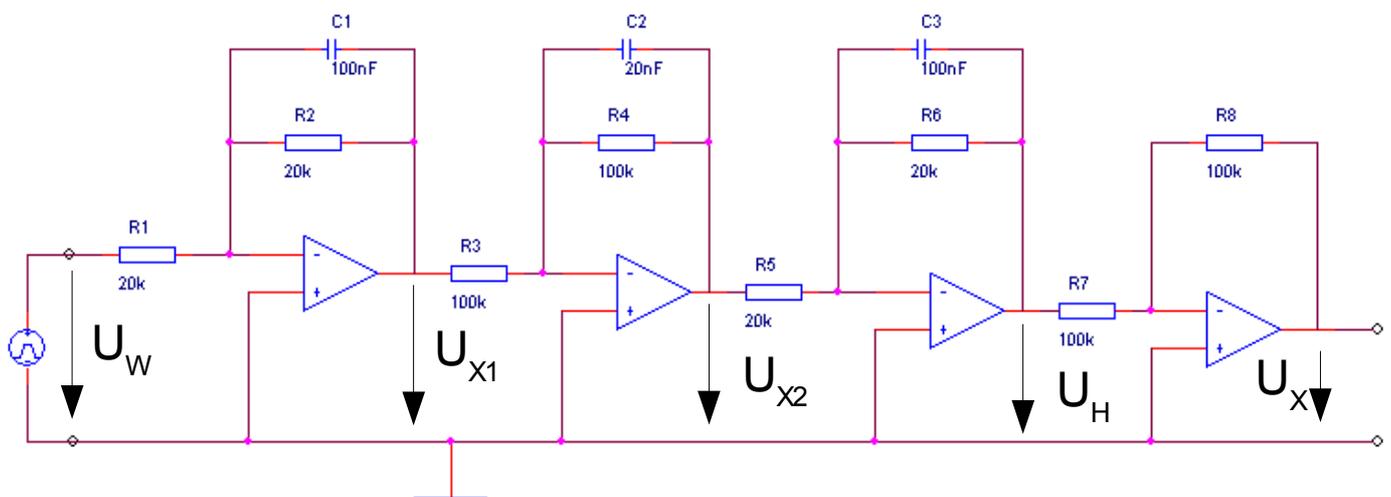


Abbildung 3.1: Nachbildung einer PT_3 -Strecke

3.1.1 Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Stellverhaltens

und geben Sie die 3 Zeitkonstanten T_{s1} , T_{s2} , T_{s3} an.

Ferner berechnen Sie die Werte für das Bodediagramm nach Betrag und Phase und tragen diese in die Tabelle 3 ein.

$$T_{s1} = R_2 \cdot C_1 = 20 \text{ k}\Omega \cdot 100 \text{ nF} = 2 \text{ ms}$$

$$T_{s2} = R_4 \cdot C_2 = 100 \text{ k}\Omega \cdot 20 \text{ nF} = 2 \text{ ms}$$

$$T_{s3} = R_6 \cdot C_3 = 20 \text{ k}\Omega \cdot 100 \text{ nF} = 2 \text{ ms}$$

$$U_x = F_{s1} \cdot F_{s2} \cdot F_{s3} \cdot F_{s4} \cdot U_w$$

$$F_{S1} = -K_{PS1} \cdot \frac{1}{1+s \cdot T_1} \quad \text{mit} \quad K_{PS1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{20\text{k}\Omega}{20\text{k}\Omega} = 1$$

$$F_{S2} = -K_{PS2} \cdot \frac{1}{1+s \cdot T_2} \quad \text{mit} \quad K_{PS2} = \frac{R_4}{R_3} = \frac{100\text{k}\Omega}{100\text{k}\Omega} = 1$$

$$F_{S3} = -K_{PS3} \cdot \frac{1}{1+s \cdot T_3} \quad \text{mit} \quad K_{PS3} = \frac{R_6}{R_5} = \frac{20\text{k}\Omega}{20\text{k}\Omega} = 1$$

$$F_{S4} = -K_{PS4} \quad \text{mit} \quad K_{PS4} = \frac{R_8}{R_7} = \frac{100\text{k}\Omega}{100\text{k}\Omega} = 1$$

Übertragungsfunktion:

$$F(s) = \frac{(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)}{(1+sT_1) \cdot (1+sT_2) \cdot (1+sT_3)} = \frac{1}{(1+sT)^3} \quad T_1 = T_2 = T_3 = T$$

$$F(s) = \frac{1}{(1+s \cdot 2 \cdot T + s^2 \cdot T^2) \cdot (1+s \cdot T)} = \frac{1}{1^3 + 3sT + 3s^2T^2 + s^3T^3} \quad PT_2 \text{ mit } PT_1\text{-Glied kombiniert}$$

aus Vergleich mit $\frac{K_{PS}}{1+s \cdot 2 \cdot D \cdot T_0 + s^2 T^2}$ und $\frac{1}{(1+s \cdot 2 \cdot T + s^2 \cdot T^2)}$ $\rightarrow D=1; K_{PS}=1$

Berechnung des Frequenzgangs:

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega \cdot 3T - \omega^2 \cdot 3T^2 - j\omega^3 \cdot T^3} = \frac{1}{1 - \omega^2 \cdot 3T^2 + j \cdot (\omega \cdot 3T - \omega^3 \cdot T^3)}$$

Trennung in Real- und Imaginärteil:

$$\text{Re}[F_s(j\omega)] = \frac{1 - \omega^2 \cdot 3T^2}{(1 - \omega^2 \cdot 3T^2)^2 + (\omega \cdot 3T - \omega^3 \cdot T^3)^2} = \frac{1 - \omega^2 \cdot 3T^2}{1^2 - 6\omega^2 T^2 + 9\omega^4 T^4 + 9\omega^2 T^2 - 6\omega^4 T^4 + \omega^6 T^6}$$

$$\text{Re}[F_s(j\omega)] = \frac{1 - 3\omega^2 T^2}{1 + 3\omega^2 T^2 + 3\omega^4 T^4 + \omega^6 T^6}$$

$$\text{Im}[F_s(j\omega)] = \frac{\omega \cdot 3T - \omega^3 \cdot T^3}{(1 - \omega^2 \cdot 3T^2)^2 + (\omega \cdot 3T - \omega^3 \cdot T^3)^2} = \frac{3\omega T - \omega^3 \cdot T^3}{1^2 - 6\omega^2 T^2 + 9\omega^4 T^4 + 9\omega^2 T^2 - 6\omega^4 T^4 + \omega^6 T^6}$$

$$\text{Im}[F_s(j\omega)] = \frac{3\omega T - \omega^3 T^3}{1 + 3\omega^2 T^2 + 3\omega^4 T^4 + \omega^6 T^6}$$

Betrag:

$$|F(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1-3\omega^2 T^2}{1+3\omega^2 T^2+3\omega^4 T^4+\omega^6 T^6}\right)^2 + \left(\frac{3\omega T-\omega^3 T^3}{1+3\omega^2 T^2+3\omega^4 T^4+\omega^6 T^6}\right)^2} =$$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{\frac{1^2-6\omega^2 T^2+9\omega^4 T^4+9\omega^2 T^2-6\omega^4 T^4+\omega^6 T^6}{(1+3\omega^2 T^2+3\omega^4 T^4+\omega^6 T^6)^2}} = \sqrt{\frac{1+3\omega^2 T^2+3\omega^4 T^4+\omega^6 T^6}{(1+3\omega^2 T^2+3\omega^4 T^4+\omega^6 T^6)^2}} =$$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{(1+3\omega^2 T^2+3\omega^4 T^4+\omega^6 T^6)}} = \frac{1}{\sqrt{1+3\omega^2 T^2+3\omega^4 T^4+\omega^6 T^6}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2 T^2)^3}}$$

$$|F(j\omega)| \text{ in dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2 T^2)^3}}\right) = 20 \log(1) - 20 \log(1+\omega^2 T^2)^{\frac{3}{2}} = -30 \log(1+\omega^2 T^2)$$

Phase:

$$\angle \varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im} F_s(j\omega)}{\operatorname{Re} F_s(j\omega)} = \arctan \frac{\frac{3\omega T - \omega^3 T^3}{1+3\omega^2 T^2+3\omega^4 T^4+\omega^6 T^6}}{\frac{1-3\omega^2 T^2}{1+3\omega^2 T^2+3\omega^4 T^4+\omega^6 T^6}} = \arctan \frac{3\omega T - \omega^3 T^3}{1-3\omega^2 T^2}$$

Zu beachten ist hierbei der positive sowie der negative arctan.

		berechnete Werte		gemessene Werte	
f in [Hz]	ω in [rad/sec]	F(s) in [dB]	$\angle F(s)$ in [°]	F(s) in [dB]	$\angle F(s)$ in [°]
0	0,0000	0	0		
25	157,0796	-1,22	-52,32		
50	314,1593	-4,34	-96,43		
75	471,2389	-8,28	-129,9		
100	628,3185	-12,34	-154,5		
150	942,4778	-19,75	-173,84		

200	1256,6371	-25,93	-204,9		
250	1570,7963	-31,08	-217		
300	1884,9556	-35,47	-225,43		
350	2199,1149	-39,25	-231,43		
400	2513,2741	-42,58	-236,76		
450	2827,4334	-45,55	-239,91		
500	3141,5927	-48,22	-242,87		
550	3455,7519	-50,64	-245,3		
600	3769,9112	-52,87	-247,34		
650	4084,0704	-54,92	-249,06		
700	4398,2297	-56,83	-250,54		
750	4712,3890	-58,6	-251,83		
800	5026,5482	-60,27	-252,96		
850	5340,7075	81,83	-253,95		
900	5654,8668	-63,31	-254,84		
950	5969,0260	-64,71	-255,64		
1000	6283,1853	-66,03	-256,35		
1500	9424,7780	-76,55	-260,89		
2000	12566,3706	-84,04	-263,17		

Tabelle 3: Bode-Diagramm

3.1.2 Simulation mit Matlab

Erzeugen Sie ein m-File, welches die Variablen für die Bauteilwerte und die Streckenparameter der Regelstrecke erzeugt. Zusätzlich sollen Objekte für die Teilübertragungsfunktionen $F_{S1}(s)$, $F_{S2}(s)$, $F_{S3}(s)$, den Inverter F_R sowie die Gesamtübertragungsfunktion $F(s)$ erzeugt werden,

```
%M-File zum Laborversuch III
```

```
%Bauteilwerte Fs1
```

```
R1=20e3
```

```
R2=20e3
```

```
C1=100e-9
```

```
%Bauteilwerte Fs2
```

```
R3=100e3
```

```
R4=100e3
```

```
C2=20e-9
```

```
%Bauteilwerte Fs3
```

```
R5=20e3
```

```
R6=20e3
```

```
C3=100e-9
```

```
%Bauteilwerte Fs4
```

```
R7=100e3
```

```
R8=100e3
```

```
%P-Regler
```

```
%erst ab Aufgabe 3.3 notwendig
```

```
Rg=10e3
```

```
R10=10e3
```

```
%Streckenparameter aus Bauteilwerten berechnen für
```

```
%Teilstrecke Fs1
```

```
Kps1=R2/R1
```

```
Ts1= R2*C1
```

```
%Teilstrecke Fs2
```

```
Kps2=R4/R3
```

```
Ts2= R4*C2
```

```
%Teilstrecke Fs3
```

```
Kps3=R6/R5
```

```
Ts3=R6*C3

%Teilstrecke Fs4
Kps4=R8/R7

%P-Regler                                     %erst ab Aufgabe 3.3 notwendig
Kpr=Rg/R10

% Übertragungsfunktionen
F1=-tf([Kps1],[Ts1,1])
F2=-tf([Kps2],[Ts2,1])
F3=-tf([Kps3],[Ts3,1])
F4=-tf([1],[0,1])

FR=-Kpr                                       %erst ab Aufgabe 3.3 notwendig

%Gesamtübertragungsfunktion
Fgeso=F1*F2*F3*F4
```

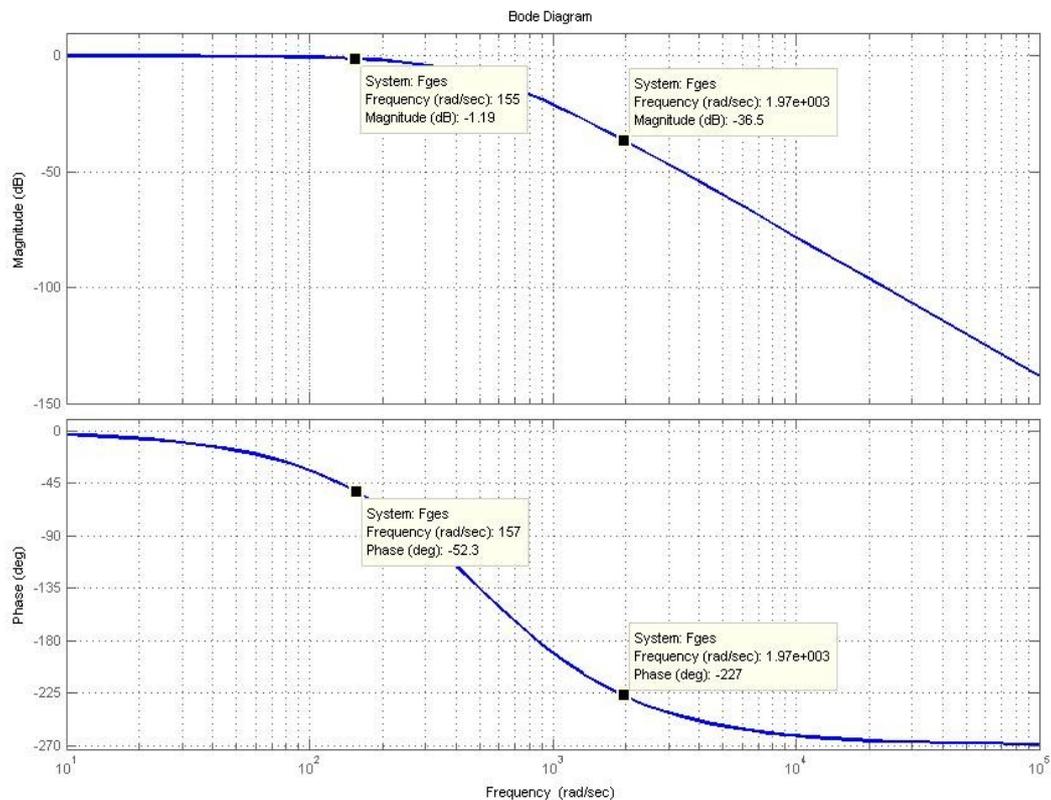
Code 4 : Kommentargerüst für das m-File

3.1.3 Stellen Sie mit Hilfe der Control System Toolbox von MATLAB

das Bodediagramm nach Betrag und Phase dar. Vergleichen Sie die Darstellung mit den von Ihnen berechneten Werten und drucken Sie dieses Bodediagramm aus.

```
Bode (Fgeso)
grid
```

Befehlsfolge um das Bodediagramm der PT_3 -Strecke darzustellen

Abbildung 3.1.3a: Bodediagramm der PT₃-Strecke

3.1.4 Messen Sie den Frequenzgang der PT₃-Strecke nach Betrag und Phase

und tragen die Messergebnisse in Tabelle 3 ein. Vergleichen Sie Ihre Messergebnisse mit den simulierten und errechneten Werten. Wählen Sie für $U_{Yeff} \approx 5V$.

Zur Messung benötigen Sie:

- ein Oszilloskop
- einen Funktionsgenerator
- Widerstandsdekade
- 2 Steckplatten mit Operationsverstärkern

Übertragen Sie die gemessenen Wert in Ihr ausgedrucktes Bodediagramm.

3.2 Berechnung, Simulation und Messung der Übergangsfunktion (Stellsprungantwort)

3.2.1 Berechnen Sie die Sprungantwort der Regelstrecke

$$u_Y(t) = u_{Y0} \cdot \sigma(t) \quad \text{für } u_{Y0} = 2,5 \text{ V}$$

und vergleichen diese mit den Sprungantworten der PT₁-Strecke bzw. PT₂-Strecke aus den vorherigen Versuchen. ($t \rightarrow 0$)

$$u_{Y0} \cdot \sigma(t) \rightsquigarrow u_{Y0} \cdot \frac{1}{s}$$

Sprungantwort:
$$U_x(s) = u_{Y0} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(1+sT)^3}$$

Lt. Korrespondenztabelle :

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(1+sT)^3} = \frac{1}{T^3} \cdot \frac{1}{s \cdot (s+1)^3} \stackrel{47}{\rightsquigarrow} \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} + \frac{t^2}{2T^2} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right]$$

$$u_x(t) = u_{Y0} \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} + \frac{t^2}{2T^2} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right]$$

	Stellsprungantwort	$t \rightarrow 0$	$t \rightarrow \infty$
PT ₁ -Strecke	$u_x(t) = u_{W0} \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \right]$	$u_x(t=0) = 0$	$u_x(t=\infty) = u_{Y0}$
PT ₂ -Strecke	$u_x(t) = u_{W0} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right]$	$u_x(t=0) = 0$	$u_x(t=\infty) = u_{Y0}$
PT ₃ -Strecke	$u_x(t) = u_{Y0} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} + \frac{t^2}{2T^2} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right]$	$u_x(t=0) = 0$	$u_x(t=\infty) = u_{Y0}$

3.2.2 Simulieren Sie mit Matlab.

Stellen Sie die Sprungfunktion der PT₃-Strecke mit Hilfe der Control System Toolbox dar. Vergleichen Sie dabei die Sprungantworten der PT₁-Strecke, PT₂-Strecke und PT₃-Strecke.

```

PT1=tf([1],[0.002 1])           %PT1-Strecke
PT2=tf([1],[0.002^2 2*0.002 1]) %PT2-Strecke
PT3=tf([1],[0.002^3 3*0.002^2 3*0.002 1]) %PT3-Strecke

step(PT1,'r:',PT2,PT3,'g.')    %Sprung PT1 rot gepunktet PT2 blau
                                %PT3 grün
grid                            %Raster ein

legend('PT1','PT2','PT3')     %Legende einfügen

```

Befehlsfolge um die Sprungantworten darzustellen

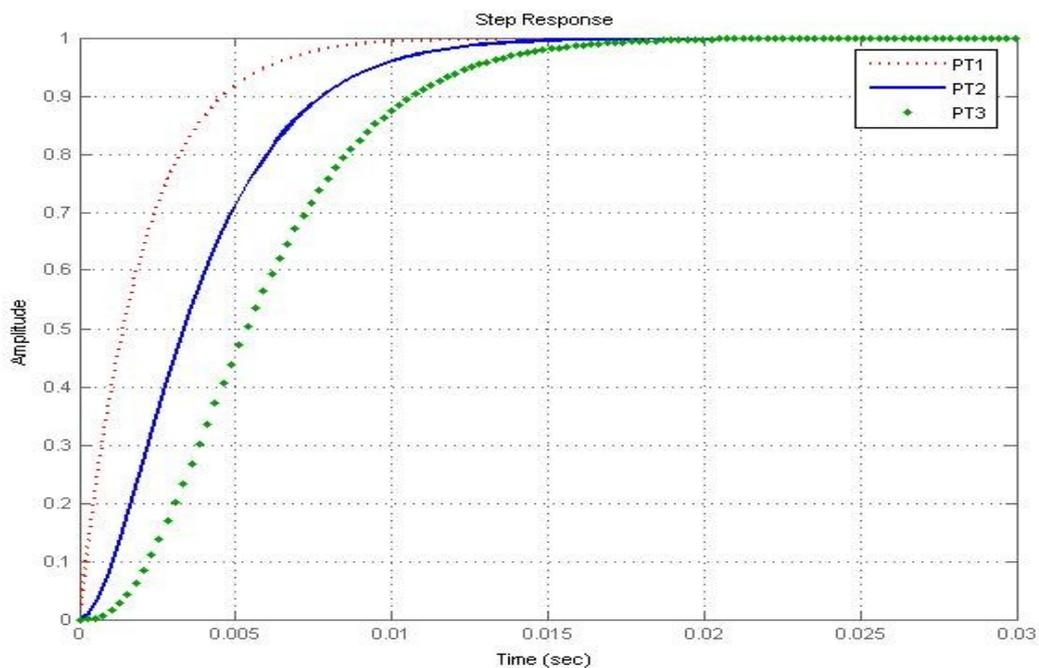


Abbildung 3.3.2a: PT1,PT2,PT3 Sprungantwort im Vergleich. Dabei gilt $D=1$ und $T=2\text{ms}$.

3.2.3 Messen Sie mit Hilfe einer Rechteckspannung $u_{y0}=2,5\text{ V}$ die Stellsprungantwort

und vergleichen diese mit der Antwort einer PT_1 -Strecke bzw. PT_2 -Strecke .

3.3 Berechnung, Simulation und Messung der Sprungantwort

des Führungsverhaltens für den in Abbildung 3.3 dargestellten Regelkreis.

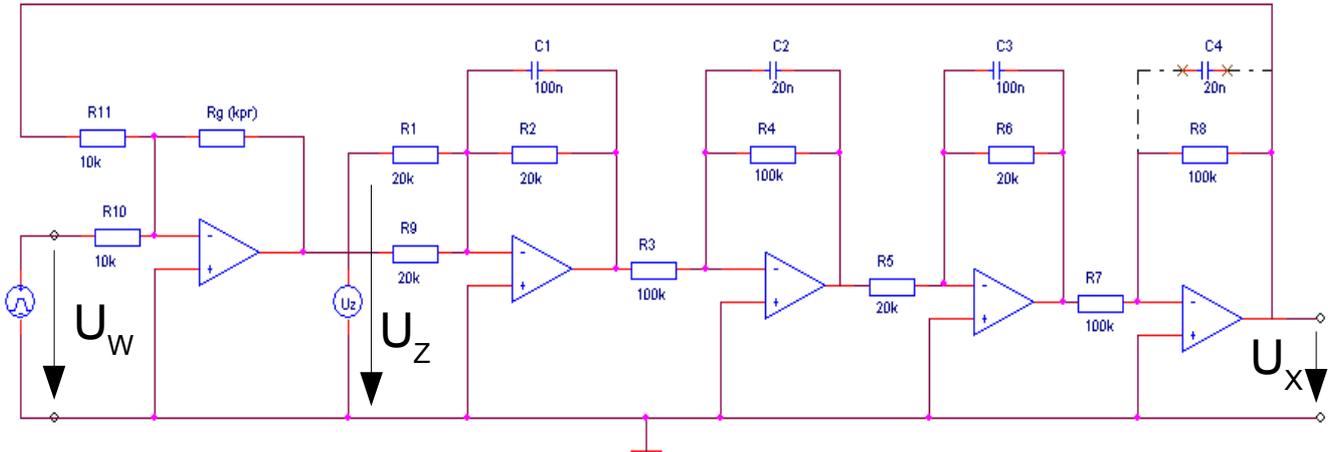


Abbildung 3.3: Nachbildung einer PT₃-Strecke mit P-Regler

3.3.1 Berechnen Sie die Sprungantwort

$u_y(t) = u_{y0} \cdot \sigma(t)$ für $u_{y0} = 2,5V$ aus Abbildung 3.3 und vergleichen diese mit der Sprungantwort der Regelstrecke.

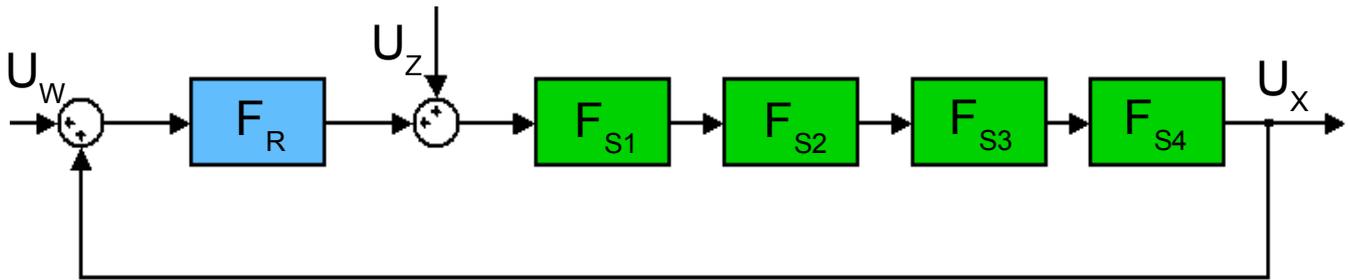
Mit der Übertragungsfunktion der Strecke

$$F_S(s) = F_{S1} \cdot F_{S2} \cdot F_{S3} \cdot F_{S4} = \frac{K_{PS}}{(1+sT)^3} ; F_{S4} = -K_{PS} ; K_{PS} = 1$$

und der Reglerübertragungsfunktion

$$F_R(s) = -K_{PR} = -\frac{R_g}{R_{10}}$$

ergibt sich folgender Signalfussplan.

Abbildung 3.3.1a: Signalflussplan der PT₃-Strecke mit P-Regler

$$U_X(s) = (U_W(s) + U_X(s)) \cdot F_R \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4 \Leftrightarrow \frac{U_X(s)}{U_W(s)} = \frac{F_R \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4}{1 - F_R \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4} = F_w(s)$$

Übertragungsfunktion des Regelkreises:

$$F_w(s) = \frac{-K_{PR} K_{PS}}{(1+sT)^3} = \frac{-K_{PR} K_{PS}}{(1+sT)^3 + K_{PR} K_{PS}} = \frac{-K_{PR}}{T^3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{T} + s\right)^3 + \frac{K_{PR} K_{PS}}{T^3}}$$

Dafür existiert keine Korrespondierende, deswegen ist eine Zerlegung der Übertragungsfunktion notwendig. Partialbruchzerlegung ist hier nicht möglich. Es bleibt die Nullstellenbestimmung des Nenners.

$$\left(\frac{1}{T} + s\right)^3 + \frac{K_{PR} K_{PS}}{T^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{T} + s = \sqrt[3]{-\frac{K_{PR} K_{PS}}{T^3}} \Leftrightarrow s = \underbrace{-\sqrt[3]{\frac{K_{PR} K_{PS}}{T^3}}}_{\text{imaginäre Anteile}} - \frac{1}{T}$$

Anmerkung: $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$ für $a < 0$ $n = \text{ungerade}$

Eine Gleichung 3ten Grades hat genau 3 Lösungen.

$$s_1 = -\sqrt[3]{\frac{K_{PR} K_{PS}}{T^3}} - \frac{1}{T} = -\frac{1}{T} (1 + \sqrt[3]{K_{PR} K_{PS}}) = \delta_1$$

$$s_2 = -\frac{1}{T} - \sqrt[3]{\frac{K_{PR} K_{PS}}{T^3}} \cdot e^{j\frac{1}{3}\pi} = -\frac{1}{T} \left[1 + \sqrt[3]{K_{PR} K_{PS}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \right] =$$

$$s_2 = -\frac{1}{T} \left[1 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{K_{PR} K_{PS}} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{K_{PR} K_{PS}} \right] = -\frac{1}{T} \left[1 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{K_{PR} K_{PS}} \right] - j \frac{1}{T} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{K_{PR} K_{PS}} = -\delta_2 - j \omega_e$$

$$s_3 = -\frac{1}{T} - \sqrt[3]{\frac{K_{PR} K_{PS}}{T^3}} \cdot e^{-j\frac{1}{3}\pi} = -\frac{1}{T} \left[1 + \sqrt[3]{K_{PR} K_{PS}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \right] =$$

$$s_3 = -\frac{1}{T} \left[1 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{K_{PR} K_{PS}} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{K_{PR} K_{PS}} \right] = -\frac{1}{T} \left[1 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{K_{PR} K_{PS}} \right] + j \frac{1}{T} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{K_{PR} K_{PS}} =$$

$$s_3 = \delta_2 + j \omega_e$$

$$F_w(s) = \frac{-K_{PR} K_{PS}}{T^3} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{1}{T} + s \right)^3 + \frac{K_{PR}}{T^3}}_{\text{Nullstellen}}} \Leftrightarrow F_w(s) = \frac{-K_{PR} K_{PS}}{T^3} \cdot \frac{1}{(s - \delta_1)(s + \delta_2 - j \omega_e)(s + \delta_2 + j \omega_e)}$$

Sprungantwort des Führungsverhaltens:

$$U_x(s) = U_{wo} \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{-k_{PR}}{T^3} \right) \cdot \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)}$$

Bis hierher gelten die Gleichungen aus Skript „Regelungstechnik 1“ S.5-6 Nr.: 38,39,40. Dadurch wird eine Untersuchung des Bezuges $b < a^2$, $b > a^2$ oder $b = a^2$ notwendig.

Vergleich mit allgemeiner Bildfunktion

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\underbrace{(s - s_1)}_{s+c} \underbrace{(s - s_2)(s - s_3)}_{s^2 + 2as + b}} \Leftrightarrow \frac{1}{s(s^2 + 2as + b)(s + c)} \quad \text{S.5-6 Nr.: 38, 39, 40}$$

$$\begin{aligned} (s - s_2)(s - s_3) &= (s - (\delta_2 - j \omega_e)) \cdot (s - (\delta_2 + j \omega_e)) = (s - \delta_2 + j \omega_e) \cdot (s - \delta_2 - j \omega_e) = \\ &= s^2 - s \delta_2 - j s \omega_e - s \delta_2 + \delta_2^2 + j \delta_2 \omega_e + j s \omega_e - j \delta_2 \omega_e + \omega_e^2 = \\ &= s^2 - 2 \delta_2 s + \underbrace{\delta_2^2}_a + \underbrace{\omega_e^2}_b \end{aligned}$$

$$a^2 = \delta_2^2 ; \quad b = \delta_2^2 + \omega_e^2 \quad \Rightarrow a^2 < b \quad \Rightarrow \text{S.5-6 Nr.: 38}$$

Laut Korrespondenztabelle:

$$U_x(t) \stackrel{38}{=} u_{w0} \cdot \left(-\frac{K_{PR} K_{PS}}{T^3} \right) \cdot \left(\frac{1}{\delta_1 (\delta_2^2 + \omega_e^2)} - \frac{e^{-\delta_1 t}}{\delta_1 \cdot (\delta_2 - \delta_1)^2 + \omega_e^2} - \frac{e^{-\delta_2 t} \cdot \sin(\omega_e t - \varphi)}{\omega_e \sqrt{((\delta_2^2 + \omega_e^2) \cdot [(\delta_2 - \delta_1)^2] + \omega_e^2)}} \right)$$

hierbei gilt:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\delta_2}{\omega_e}\right) + \arctan\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{\omega_e}\right)$$

$$u_x(t) = u_{w0} \cdot \left(-\frac{K_{PR} K_{PS}}{T^3} \right) \cdot \left(\frac{1}{\delta_1 (\delta_2^2 + \omega_e^2)} - \frac{e^{-\delta_1 t}}{\delta_1 \cdot (\delta_2 - \delta_1)^2 + \omega_e^2} - \frac{e^{-\delta_2 t} \cdot \sin(\omega_e t - \varphi)}{\omega_e \sqrt{((\delta_2^2 + \omega_e^2) \cdot [(\delta_2 - \delta_1)^2] + \omega_e^2)}} \right)$$

3.3.2 Berechnen Sie für den in Abbildung 3.3 angegebenen Regelkreis

die kritische Reglerverstärkung K_{PRK} und die kritische Frequenz f_k bzw. ω_k .

Die Übertragungsfunktion lautet: $F_w(s) = K_{PR} K_{PS} \frac{1}{(1+sT)^3 + K_{PR} K_{PS}}$

Berechnung der kritischen Werte nach dem **Hurwitz-Verfahren**:

$$F_w(s) = K_{PR} K_{PS} \frac{1}{1^3 + 3sT + 3s^2 T^2 + s^3 T^3 + K_{PR} K_{PS}} = K_{PR} K_{PS} \frac{1}{s^3 T^3 + 3s^2 T^2 + 3sT + 1 + K_{PR} K_{PS}}$$

Vergleich mit charakteristischer Gleichung (3te Ordnung):

$$s^3 \underbrace{T^3}_{a_3} + s^2 \underbrace{3T^2}_{a_2} + s \underbrace{3T}_{a_1} + \underbrace{1 + K_{PR} K_{PS}}_{a_0} = a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0$$

Die Stabilitätskriterien fordern:

$$a_0 = 1 + K_{PR} K_{PS} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_{PR} K_{PS} > -1 \quad \wedge$$

$$a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 = 3T \cdot 3T^2 - (1 + K_{PR} K_{PS}) \cdot T^3 = 8T^3 - K_{PR} K_{PS} \cdot T^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad K_{PRK} < \frac{8}{K_{PS}} \quad \text{mit} \quad K_{PS} = 1$$

$$\Rightarrow K_{PRK} = 8 \quad \text{Stabilitätsgrenze}$$

Berechnung der kritischen Frequenz: mit Hilfe des vereinfachten **Nyquist-Kriteriums**. Dabei sind beim offenen Regelkreis die Eingangsgrößen und Störgrößen gleich 0.

$$F_o(j\omega) = F_R(j\omega) \cdot F_{SI}(j\omega) \cdot F_{S2}(j\omega) \cdot F_{S3}(j\omega) \cdot F_{S4}(j\omega) \quad ; \quad K_{PS} = 1 \quad F_{S4} = -K_{PS}$$

$$F_o(j\omega) = K_{PR} \frac{1}{(1 + j\omega T)^3} = K_{PR} \frac{1}{1^3 + 3j\omega T - 3\omega^2 T^2 - j\omega^3 T^3}$$

Wenn die Funktion der Verstärkung des offenen Regelkreises $F_o(j\omega)$ den Punkt (-1,0) durchläuft ist der Regelkreis grenzstabil.

$$\Rightarrow F_o(j\omega) = -1 = K_{PR} K_{PS} \frac{1}{1 + 3j\omega T - 3\omega^2 T^2 - j\omega^3 T^3}$$

$$0 = K_{PR} K_{PS} \frac{1}{1 + 3j\omega T - 3\omega^2 T^2 - j\omega^3 T^3} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 3j\omega T - 3\omega^2 T^2 - j\omega^3 T^3 + K_{PR} K_{PS} = 0$$

$$1 - 3\omega^2 T^2 + K_{PR} K_{PS} + j(3\omega T - \omega^3 T^3) = 0$$

Trennung in Real- und Imaginärteil:

Imaginärteil

$$3\omega_k T - \omega_k^3 T^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - \omega_k^2 T^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_k = \frac{\sqrt{3}}{T}$$

Realteil

$$1 - 3\omega_k^2 T^2 + K_{PR} K_{PS} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_{PRK} K_{PS} = -1 + 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{T} \right)^2 T^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad K_{PRK} = \frac{8}{K_{PS}} \quad \text{mit} \quad K_{PS} = 1$$

$$K_{PRK} = 8$$

3.3.3 Simulation mit Matlab

3.3.3.1 Stellen Sie die Sprungantwort des Führungsverhaltens der PT₃-Strecke mit P-Regler

mit Hilfe der Control System Toolbox dar. Vergleichen Sie dabei die Sprungantwort der PT₃-Strecke mit dem Verhalten des geschlossenen Regelkreises.

```
PT3=tf([1],[0.002^3 3*0.002^2 3*0.002 1]) %PT3-Strecke
PT3R=tf([7],[0.002^3 3*0.002^2 3*0.002 7]) %PT3-Strecke mit Rückkopplung
                                        %im stabilem Bereich
step(PT3,'r:',PT3R)                    %Ausgabe der Schrittantwort
grid on                                 %Raster ein
legend('PT3','PT3R')                   %Legende ein
```

Befehlsfolge um den Vergleich darzustellen

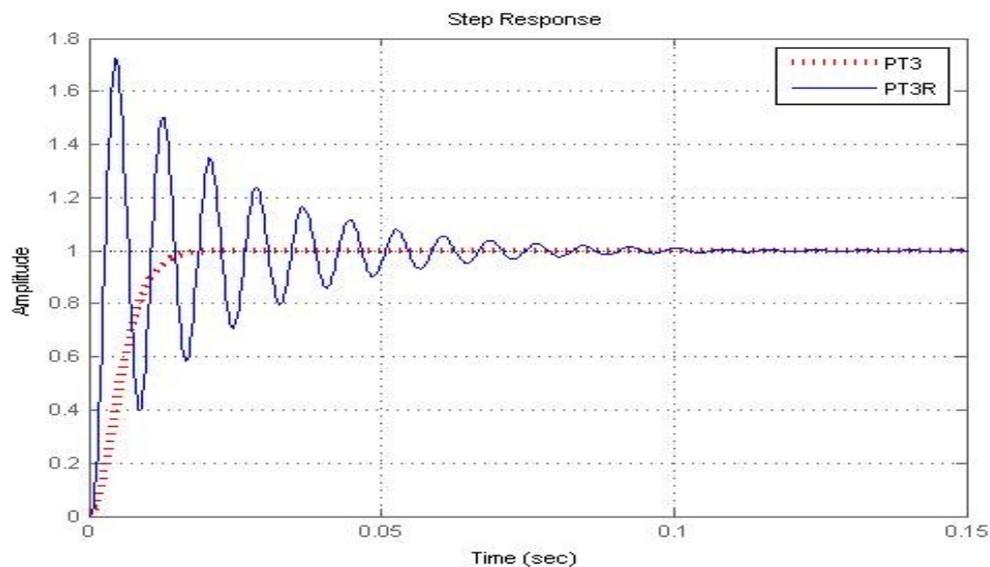


Abbildung 3.3.3.1a : Sprungantwort des Regelkreises (blau) und die Sprungantwort der PT₃-Strecke (rot gepunktet)

3.3.3.2 Stellen Sie mit Hilfe der Übertragungsfunktion des Führungsverhaltens

die Sprungantworten für die **stabile**, **grenzstabile** und **instabile** Verhalten des Regelkreises durch entsprechende Werte für K_{PR} dar.

```
PT3Rs=tf([7],[0.002^3 3*0.002^2 3*0.002 7]) % stabiler Regelkreis
PT3Rk=tf([9],[0.002^3 3*0.002^2 3*0.002 9]) % grenzstabiler Regelkreis
PT3Ri=tf([9.1],[0.002^3 3*0.002^2 3*0.002 9.1]) % instabiler Regelkreis
subplot(311) , step(PT3Rs), grid on
subplot(312) , step(PT3Rk), grid on
subplot(313) , step(PT3Ri), grid on
```

Befehlsfolge um die Sprungantworten des rückgekoppelten PT3-Systems darzustellen

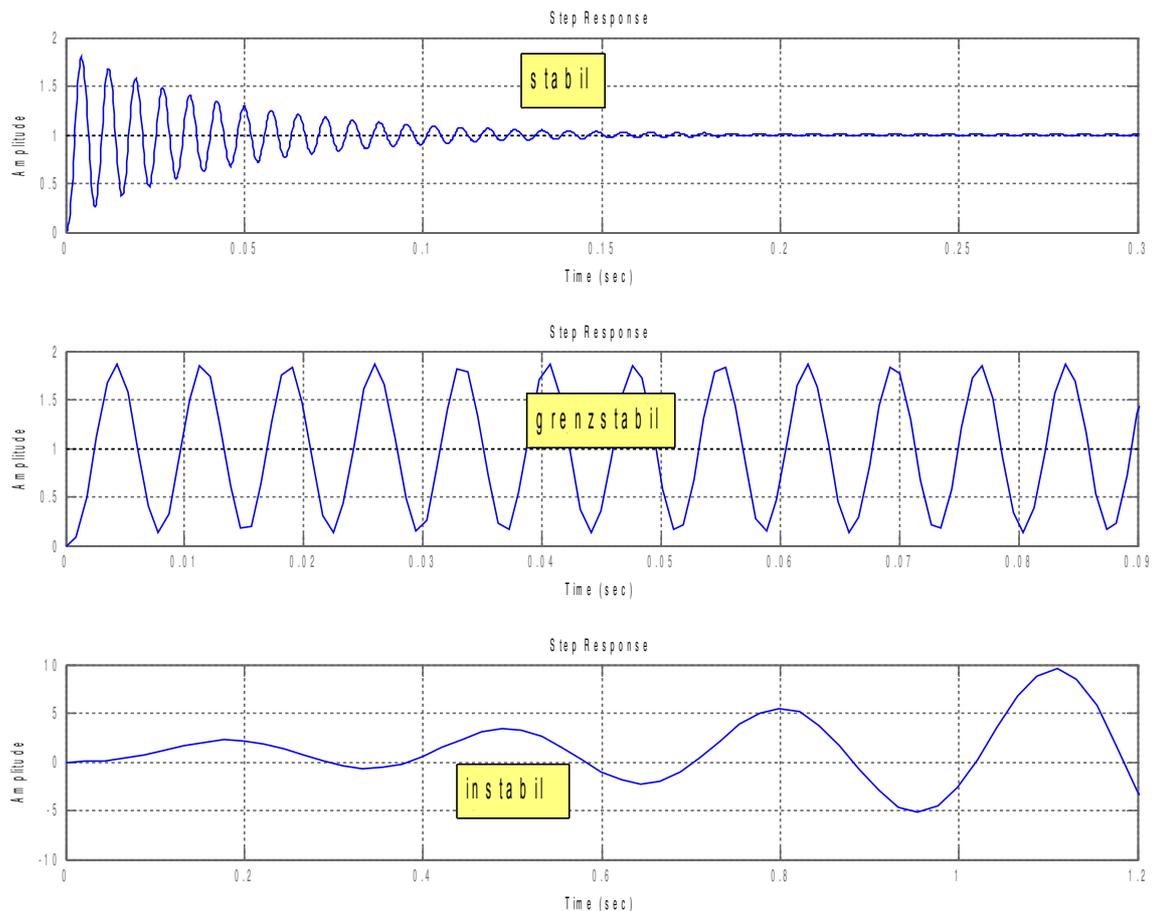


Abbildung 3.3.3.2a

3.3.4 Bauen Sie den in Abbildung 3.3 angegebenen Regelkreis auf. (ohne C_4)

Dazu benötigen Sie:

- Widerstandsdekade
- 3 Steckplatten mit Operationsverstärker

3.3.5 Messen Sie die Sprungantwort des Führungsverhaltens dieses Systems

indem Sie den vorher ermittelten Wert für K_{PRK} halbieren und für $|U_{w0}|=1V$ setzen.

3.3.6 Messen Sie ebenfalls die Sprungantwort des Störverhaltens für $u_{z0}=0,5 V$.

Der Störort ist in Abbildung 3.3 angegeben.

3.4 Simulation und Messung der Sprungantwort eines Regelkreises mit PT_4 -Strecke.

Und P-Regler. Dazu wird der in Abbildung 3.3 gestrichelt eingezeichnete Kondensator C_4 zur Strecke hinzugefügt. So dass sich eine Regelstrecke mit Ausgleich ergibt, die vier gleiche Zeitkonstanten aufweist.

3.4.1 Simulieren Sie mit Hilfe von Matlab Simulink diesen Regelkreis

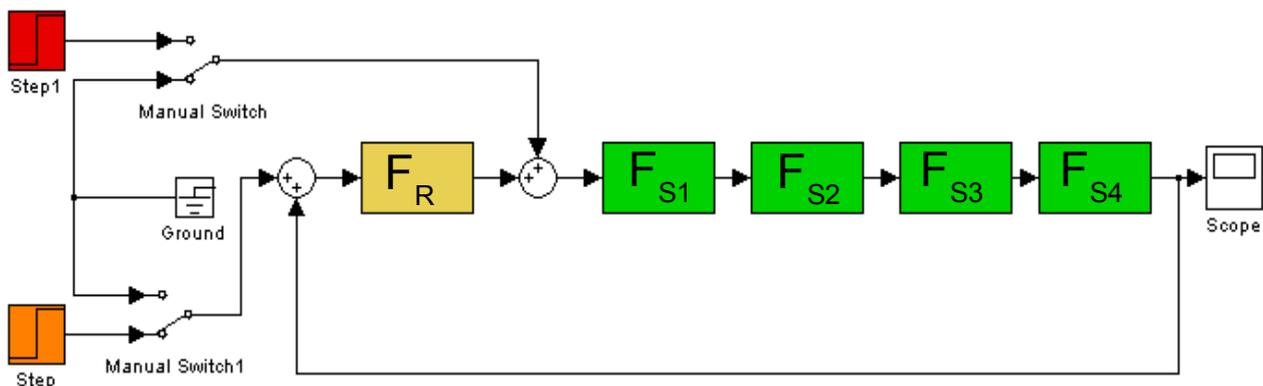


Abbildung 3.4.1a

3.4.2 Bestimmen Sie durch verändern der Reglerparameter von K_{PR}

den Wert von K_{PRK} . Vergleichen Sie den Wert mit dem Errechneten für K_{PRK} von Aufgabe 3.3.2.

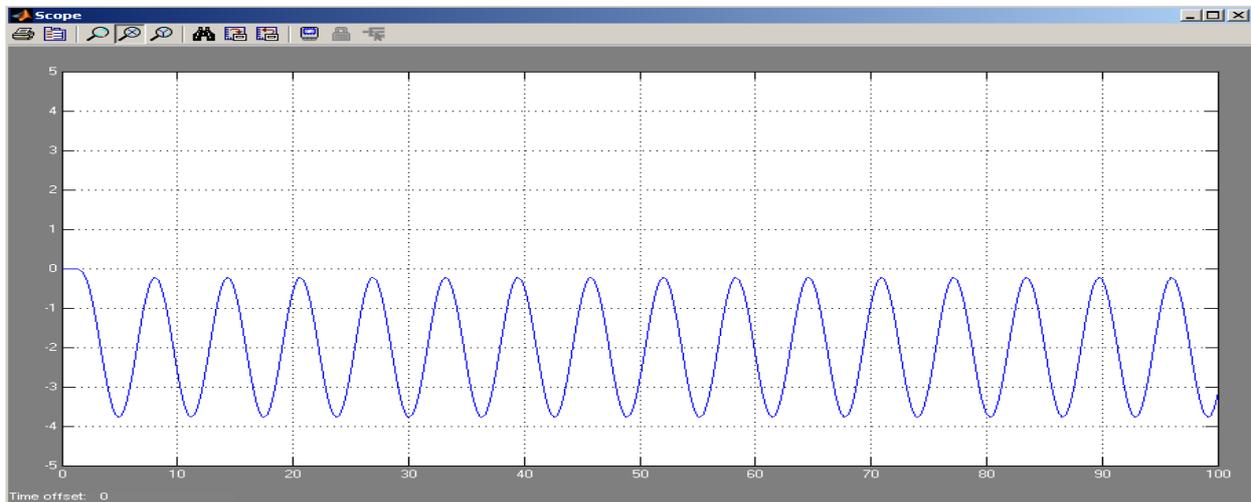


Abbildung 3.4.2a: Systemsprungantwort für $K_{PRK} = -4$ (grenzstabiler Zustand)

3.4.3 Bestimmen Sie auch am aufgebauten Regelkreis durch verändern von K_{PR}

den Wert von K_{PRK} . Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Simulierten Wert für für K_{PRK} .